確率分布空間における幾何学的構造について

峰　真　如 *・宮　田　庸　一 **

1.　はじめに

昨今，情報幾何学という研究分野が注目を集めている．情報幾何学とは確率分布関数の空間に対して幾何構造を導入するものであり，微分幾何学の言葉で記述される [1, 2, 3]．これによって統計学の幾何学的理解が進むだけでなく，それに関連した量子物理，人工知能，機械学習などへの応用も研究されている [4]．本稿ではこの情報幾何学の面白さの一端を伝えるべく解説を試みたい．特に第 2 節では数学的準備を行い，次に第 3 節では確率分布空間における幾何学的構造とはどういうものか，ということについて文献 [3, 5] を整理する形で述べる．次に第 4 節ではこの分野の基本的な公式である α 接続係数の表式についてその詳述を試みる．これは [3] の証明を補ったものである．第 5 節では量子系の状態空間についての記述について紹介し，情報幾何学に関連した今後の展望についてコメントする．第 6 節ではまとめを述べる．なお，第 1 節から第 4 節まで，および第 6 節は峰と宮田が，第 5 節については峰が主に執筆した．

2.　数学的準備

ここでは，本稿で議論する内容についての基礎的な事項について整理して述べる．

定義

集合 M が n **次元** C^r **級多様体**であるとは，M が可算基を持つ Hausdorff 空間で，適当な添え字集合 $\mathcal{A}$ と，M の開集合の族 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ と写像 $\psi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ の族 $\{\psi_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ があって，以下の 3 条件を満たすものである．

(i) $M = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} U_\alpha$

(ii) 各 $\alpha \in \mathcal{A}$ に対し，像 $\psi_\alpha(U_\alpha)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合で，$\psi_\alpha : U_\alpha \to \psi_\alpha(U_\alpha)$ が同相写像．

(iii) $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ならば，写像 $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ は C^r 級．

＊早稲田大学本庄高等学院
＊＊高崎経済大学経済学部

なお，上記定義で各写像 ψ_α を**局所座標系**といい，開集合 U_α との組をすべて集めたもの $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ を**アトラス**という．直感的には，多様体とは局所的に $\mathbb{R}^n$ の部分空間，すなわち "地図" と同一視でき，"地図" どうしが重なっているところでは微分可能な形でその読み替えが可能な集合と考えることができる．

さて，多様体 M 上の関数の性質は，付随した局所座標系 (U_α, ψ_α) で特徴づけられる．多様体 M 上で定義された関数 $f: M \to \mathbb{R}$ に対して，$f \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(U_\alpha) \to \mathbb{R}$ が C^∞ 級であったとする．このことがすべての座標近傍 (U_α, ψ_α) について言えるとき，f は **M 上の C^∞ 級関数**という．多様体 M 上の C^∞ 級関数全体の集合を $C^\infty(M)$ と書く．

定義

多様体 M 上の点 p における接ベクトル X_p とは，各 $f \in C^\infty(M)$ に対して実数 $X_p(f)$ を対応させる写像であって，以下の 2 つの性質を満たすものである．

(i) 線形性

$$X_p(af + bg) = aX_p(f) + bX_p(g)$$

(ii) Leibniz 則

$$X_p(fg) = X_p(f)g(p) + f(p)X_p(g)$$

ここで，$a, b \in \mathbb{R}$, $f, g \in C^\infty(M)$ である．

上記の定義は Euclid 空間における曲面上の接ベクトルの性質を一般化させたものである．なお，多様体 M の点 p における接ベクトル全体の集合は，自然に導入される線形結合に対して閉じている．よって，点 p における接ベクトル全体の集合をベクトル空間とみなすことができる．これを点 p における**接ベクトル空間**とよび，T_pM と書く．また，線形代数の知識により，ベクトル空間 T_pM には内積を介してその双対空間が導入できる [6] ので，それを $(T_pM)^*$ と書くことにする．

多様体 M の各点 p に対し，点 p における接ベクトル X_p を 1 つ付随させる対応 $X = \{X_p\}_{p\in M}$ を M 上の**ベクトル場**という．

定義

多様体 M 上の点 p における (r, s) **型テンソル** F_p とは，点 p における接ベクトル空間を T_pM，その双対空間を $(T_pM)^*$ とするとき，

$$F_p : \underbrace{(T_pM)^* \times \cdots \times (T_pM)^*}_{r\,個} \times \underbrace{T_pM \times \cdots \times T_pM}_{s\,個} \to \mathbb{R} \tag{2.1}$$

であって，各変数について線形となるものである．

以下，説明を補足する．上記の定義において "各変数について線形である" とは，以下のようになることである．いま，各 $i = 1, \cdots, r$ について $\xi_i, \eta_i \in (T_pM)^*$，各 $j = 1, \cdots, s$ について $X_j, Y_j \in T_pM$ とし，$f, g, h, k \in C^\infty(M)$ とするとき，

$$F_p(\xi_1, \cdots, f\xi_i + g\eta_i, \cdots, \xi_r, X_1, \cdots, X_s)$$
$$= fF_p(\xi_1, \cdots, \xi_i, \cdots, \xi_r, X_1, \cdots, X_s) + gF_p(\xi_1, \cdots, \eta_i, \cdots, \xi_r, X_1, \cdots, X_s) \quad (2.2)$$

および

$$F_p(\xi_1, \cdots, \xi_r, X_1, \cdots, hX_j + kY_j, \cdots, X_s)$$
$$= hF_p(\xi_1, \cdots, \xi_r, X_1, \cdots, X_j, \cdots, X_s) + kF_p(\xi_1, \cdots, \xi_r, X_1, \cdots, Y_j, \cdots, X_s) \quad (2.3)$$

定義

M を m 次元 C^r 級多様体, N を n 次元 C^r 級多様体とする ($r \in \mathbb{N}$). 微分可能な写像 $\Phi: M \to N$ について，M, N の局所座標系をそれぞれ $(x^1, \cdots, x^n)$, $(y^1, \cdots, y^n)$ と書き，

$$\begin{cases} y^1 & = \Phi^1(x^1, \cdots, x^m) \\ & \vdots \\ y^n & = \Phi^n(x^1, \cdots, x^m) \end{cases} \quad (2.4)$$

と表すとき，写像 Φ の**点 p における微分** $(\Phi_*)_p$ とは，線形写像 $(\Phi_*)_p : T_pM \to T_{\Phi(p)}N$ であって，その行列表示が

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial \Phi^1}{\partial x^m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Phi^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial \Phi^n}{\partial x^m} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

で与えられるものをいう.

なお，微分幾何学では，変数変換に伴う諸量の変換性を論じやすくするために，座標変数についての添え字は x^i のように「上つき」で書くのが通例であることを申し添えておく.

3. 確率分布空間の幾何学的構造

有限次元確率分布空間 S_{n-1} を次のように定義する.

$$S_{n-1} = \{p : \Omega_n \to \mathbb{R}_{++}, \sum_{\omega \in \Omega_n} p(\omega) = 1\} \quad (3.1)$$

ここで，$\Omega_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ であり，1 つ 1 つの要素は根元事象を表している．つまり根元事象を自然数でラベリングしているのである．また，$\mathbb{R}_{++} = \{x \in \mathbb{R};\, x > 0\}$ である．S_{n-1} の各点 p が確率分布関数に対応していることに注意せよ．$p \in S_{n-1}$ に対して，$(p(1), \cdots, p(n)) \in \mathbb{R}^n$ なので，S_{n-1} は $\mathbb{R}^n$ において超曲面 $\sum_{i=1}^{n} p(i) = 1$ で指定される $n-1$ 次元多様体とみなせる.

さて，このようにして導入された確率分布空間に対して，どのような幾何学的構造が考えられるだろうか．以下，文献 [5] にしたがってその説明を試みる．

定義

写像 $\Phi : S_{n-1} \to S_{m-1}$ が Ω_n から Ω_m へのある条件付き確率分布 Q によって，$\Phi(p) = \sum_{\omega\in\Omega_n} Q(\cdot|\omega)p(\omega)$ とあらわされるとき，Φ を **Markov 準同型**とよぶ．Markov 準同型 $\Phi : S_{n-1} \to S_{m-1}$ に対し，合成写像 $\Psi \circ \Phi$ が S_{n-1} 上の恒等写像となるような Markov 準同型 $\Psi : S_{m-1} \to S_{n-1}$ が存在するとき，Φ を **Markov 埋め込み**と呼ぶ．

Markov 埋め込みの具体例をいくつか構成してみよう．

(例 1) $n = 2, m = 2$ のとき

$p \in S_{2-1}$ とすれば，$p : \Omega_2 \to \mathbb{R}_{++}$ であるから，$\Omega_2 = \{1, 2\}$ とすると，$p = (p(1), p(2))$ と指定される．ここで S_{2-1} の定義より $p(1) > 0, p(2) > 0, p(1) + p(2) = 1$ である．

ここで，写像 $\Phi : S_{2-1} \to S_{2-1}$ を

$$\begin{pmatrix} \Phi^1 \\ \Phi^2 \end{pmatrix} = p(1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + p(2)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

と定義すれば，$\Phi^1 > 0, \Phi^2 > 0, \Phi^1 + \Phi^2 = 1$ となっていて，この対応 Φ は Markov 準同型となっている．また，$(\Phi^1, \Phi^2) \in S_{2-1}$ として，対応 $\Psi : S_{2-1} \to S_{2-1}$ を

$$\begin{pmatrix} \Psi^1 \\ \Psi^2 \end{pmatrix} = \Phi^1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \Phi^2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

で定義すれば，この対応 Ψ も当然のことながら Markov 準同型の公理を満たし，そして合成写像 $\Psi \circ \Phi$ は S_{2-1} における恒等写像になっているから，対応 (3.2) は Markov 埋め込みである．

(例 2) $n = 2, m = 4$ の場合

$p \in S_{2-1}$ とすれば，(例 1) と同様，$p = (p(1), p(2))$ と指定される．ここで $p(1) + p(2) = 1$ である．

ここで写像 $\Phi : S_{2-1} \to S_{4-1}$ を

$$\begin{pmatrix} \Phi^1 \\ \Phi^2 \\ \Phi^3 \\ \Phi^4 \end{pmatrix} = p(1)\begin{pmatrix} s \\ 1-s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p(2)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \\ 1-t \end{pmatrix} \qquad 0 < s < 1,\ 0 < t < 1 \tag{3.4}$$

と定義すれば，$\Phi^i > 0\ (i = 1, 2, 3, 4)$, $\Phi^1 + \Phi^2 + \Phi^3 + \Phi^4 = 1$ となっていて，この対応 Φ は Markov 準同型である．また，$(\Phi^1, \Phi^2, \Phi^3, \Phi^4) \in S_{4-1}$ として，

$$\begin{pmatrix} \Psi^1 \\ \Psi^2 \end{pmatrix} = \Phi^1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \Phi^2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \Phi^3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \Phi^4\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

で定義すれば，この対応 Ψ も Markov 準同型の公理を満たし，そして合成写像 $\Psi \circ \Phi$ は S_{2-1} における恒等写像になっているから，対応 (3.4) は Markov 埋め込みである．

Markov 埋め込みについての直感的な説明は明快な形で文献 [3] の 5 章に示されている．そこでは，(i) データラベルの入れ替え，および (ii) データの同一視，という説明がなされている．ここで，(i) の「データラベルの入れ替え」とは，上記の (例 1) に対応するもので，どのデータを何番目のデータとして扱うかを選択することである．(ii) の「データの同一視」で想定しているのは，上記の (例 2) に対応するもので，例えば 2 つのデータがノイズなどで区別できなくなり 1 つのデータのようにとらえられてしまう状況である．上記のように，(i) データラベルの入れ替えや (ii) データの同一視によって確率分布関数どうしの扱われ方（幾何学的構造）が変わってしまってはいけない，という自然な要請は，“Markov 埋め込みに対する不変性” と表現される．この不変性により，確率分布空間に許される計量（や，それに伴う接続）がほとんど決まってしまう，というのが以下の Chentsov の定理の面白さである．なお，今後，変数 x^i での偏微分を ∂_i などと書くことにする．すなわち $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ などである．

まず，“Markov 埋め込みに対する不変性” を定義する．

定義

写像 $\Phi:\ S_{n-1} \to S_{m-1}$ を 1 つの Markov 埋め込みとする．S_{n-1} 上の $(0,2)$ 型テンソル $g_p^{[n]}$ と S_{m-1} 上の $(0,2)$ 型テンソル $g_{\Phi(p)}^{[m]}$ が **Markov 埋め込み Φ に対して不変であるとは**，X, Y を S_{n-1} のベクトル場として，

$$g_p^{[n]}(X, Y) = g_{\Phi(p)}^{[m]}(\Phi_* X, \Phi_* Y) \tag{3.6}$$

となるときをいう．ここで，Φ_* は (2.5) で定義された写像 Φ の微分である．

なお，この (3.6) 式は本来，

$$g_p^{[n]}(X_p, Y_p) = g_{\Phi(p)}^{[m]}((\Phi_*)_p X_p, (\Phi_*)_p Y_p) \tag{3.7}$$

のように，評価される点 $p \in S_{n-1}$ を明示させるべきである．なぜなら，例えば左辺の $g_p^{[n]}$ は点 $p \in S_{n-1}$ における $(0,2)$ 型テンソルなので，(2.1) 式の定義で見たように，

$$g_p^{[n]}:\ (T_p S_{n-1}) \times (T_p S_{n-1}) \to \mathbb{R} \tag{3.8}$$

であるからである．しかし，煩雑さを回避するために，以降も含めて省略して (3.6) のように書くものとする．

次に，確率分布空間の幾何学的構造を与える Chentsov の定理について述べる．

Chentsov の定理

X, Y を S_{n-1} におけるベクトル場とする．また，S_{n-1} の一般の座標系を (x^i) とする．このとき，任意の Markov 埋め込みに対して不変である S_{n-1}のRiemann 計量は，定数倍を除いて

$$g_p(X,Y) = \sum_{\omega=1}^{n} p(\omega)(X\log p(\omega))(Y\log p(\omega)) \tag{3.9}$$

とあらわされ，Markov 埋め込みに対して不変なアファイン接続 $\nabla^{(\alpha)}$ は

$$g_p(\nabla_X^{(\alpha)}Y, Z) = g_p(\overline{\nabla}_X Y, Z) - \frac{\alpha}{2} S_p(X,Y,Z) \tag{3.10}$$

により実数 α と 1 対 1 に対応する．ただし，$\overline{\nabla}$ は計量 (3.9) により

$$g_p(\overline{\nabla}_{\partial_i}\partial_j, \partial_k) = \frac{1}{2}\left\{\partial_i g_p(\partial_j,\partial_k) + \partial_j g_p(\partial_i,\partial_k) - \partial_k g_p(\partial_i,\partial_j)\right\} \tag{3.11}$$

で定義される Riemann 接続であり，S_p は

$$S_p(X,Y,Z) = \sum_{\omega=1}^{n} p(\omega)(X\log p(\omega))(Y\log p(\omega))(Z\log p(\omega)) \tag{3.12}$$

で定義される $(0,3)$ 型対称テンソルである．

(3.9) 式で与えられる計量 g は Fisher 計量と呼ばれる．添え字 p は多様体 S_{n-1} 上の点 p における計量ないしは接続という意味である．Riemann 計量とは $(0,2)$ 型テンソルであって，多様体の各点で正定値対称双線形形式となっているものである．そしてアファイン接続とは（ある意味で方向を持った）多様体上の微分のことである．詳しくは多様体の教科書（たとえば [6]）を参照のこと．ここで (3.9) 式に現れる $X\log p(\omega)$ について説明を補足する．$p \in S_{n-1}$ は $(p(1),\cdots,p(n)) \in \mathbb{R}^n$ と同一視でき，これは $\mathbb{R}^n$ に値をとる多様体 S_{n-1} 上のベクトル値関数である．同様に，$\log p = (\log p(1),\ldots,\log p(n))$ も $\mathbb{R}^n$ に値をとる多様体 S_{n-1} 上のベクトル値関数で，この関数にベクトル場 X を作用させて得られる関数の点 p での値が $X\log p$ である[1]．

この Chentsov の定理の証明は，Markov 埋め込みに対する不変性を満たす計量を具体的に構成してゆく手続きをとる．詳しくは，例えば [3] を参照のこと．

4. α 接続係数の具体的な表式

前節では確率分布空間において計量や接続がどのように導入されるかについて眺めた．本節では，前節で得られた α 接続についての接続係数を具体的に表すことにする．この結果は多くの文献（例えば [3]）にまとめられているが，具体的な計算過程を詳述したものはあまり無いようである．そこで本節ではその計算過程を明らかにしたい．

早速であるが，α 接続係数は以下のように与えられる．

[1] したがって，この量も本来は $X_p \log p$ と書かれるべきものである．

α 接続係数の公式

S_{n-1} の一般の座標系 (x^i) に関する α 接続 $\nabla^{(\alpha)}$ の接続係数 $\Gamma^{(\alpha)}_{ij,k}$ を $\Gamma^{(\alpha)}_{ij,k} = g_p(\nabla^{(\alpha)}_{\partial_i}\partial_j, \partial_k)$ で定義すれば,

$$\begin{aligned}\Gamma^{(\alpha)}_{ij,k} &= \frac{1-\alpha}{2}\sum_{\omega=1}^{n} p(\omega)(\partial_i \log p(\omega))(\partial_j \log p(\omega))(\partial_k \log p(\omega)) \\ &\quad + \sum_{\omega=1}^{n} p(\omega)(\partial_i\partial_j \log p(\omega))(\partial_k \log p(\omega)) \end{aligned} \tag{4.1}$$

(証)

(3.10) より,

$$\begin{aligned}\Gamma^{(\alpha)}_{ij,k} &= g_p(\nabla^{(\alpha)}_{\partial_i}\partial_j, \partial_k) \\ &= g_p(\nabla^{(0)}_{\partial_i}\partial_j, \partial_k) - \frac{\alpha}{2}S_p(\partial_i, \partial_j, \partial_k) \end{aligned} \tag{4.2}$$

これと (3.12) および (4.1) を見比べて,

$$g_p(\nabla^{(0)}_{\partial_i}\partial_j, \partial_k) = \frac{1}{2}S_p(\partial_i, \partial_j, \partial_k) + \sum_{\omega=1}^{n} p(\omega)(\partial_i\partial_j \log p(\omega))(\partial_k \log p(\omega)) \tag{4.3}$$

となることを示せばよい．以下，総和記号 $\sum$ の引数を省略することとする．また，$p(\omega)$ を単に p と書き，$\log p(\omega)$ を単に l と書くことにする．

$$\begin{aligned}g_p(\nabla^{(0)}_{\partial_i}\partial_j, \partial_k) &= g_p(\overline{\nabla}_{\partial_i}\partial_j, \partial_k) \\ &= \frac{1}{2}\{\partial_i g_p(\partial_j, \partial_k) + \partial_j g_p(\partial_i, \partial_k) - \partial_k g_p(\partial_i, \partial_j)\} \end{aligned} \tag{4.4}$$

ここで，(3.9) 式より $g_p(\partial_j, \partial_k) = \sum p(\partial_j l)(\partial_k l)$ であるから,

$$\partial_i g_p(\partial_j, \partial_k) = \sum(\partial_i p)(\partial_j l)(\partial_k l) + \sum p(\partial_i\partial_j l)(\partial_k l) + \sum p(\partial_j l)(\partial_i\partial_k l) \tag{4.5}$$

となる．同様に,

$$\partial_j g_p(\partial_i, \partial_k) = \sum(\partial_j p)(\partial_i l)(\partial_k l) + \sum p(\partial_j\partial_i l)(\partial_k l) + \sum p(\partial_i l)(\partial_j\partial_k l) \tag{4.6}$$

$$\partial_k g_p(\partial_i, \partial_j) = \sum(\partial_k p)(\partial_i l)(\partial_j l) + \sum p(\partial_k\partial_i l)(\partial_j l) + \sum p(\partial_i l)(\partial_k\partial_j l) \tag{4.7}$$

よって，$\frac{1}{2}\{(4.5)$ 式 $+ (4.6)$ 式 $- (4.7)$ 式 $\}$ とすれば,

$$\begin{aligned}g_p(\nabla^{(0)}_{\partial_i}\partial_j, \partial_k) &= \frac{1}{2}\left\{\sum(\partial_i p)(\partial_j l)(\partial_k l) + \sum(\partial_j p)(\partial_i l)(\partial_k l) - \sum(\partial_k p)(\partial_i l)(\partial_k l)\right\} \\ &\quad + \sum p(\partial_i\partial_j l)(\partial_k l) \end{aligned} \tag{4.8}$$

となるが，ここで，右辺の中括弧内は $\partial_i p = p(\partial_i l)$ などとなることに注意すれば,

$$\sum(\partial_i p)(\partial_j l)(\partial_k l)+\sum(\partial_j p)(\partial_i l)(\partial_k l)-\sum(\partial_k p)(\partial_i l)(\partial_k l)=\sum p(\partial_i l)(\partial_j l)(\partial_i k)$$
$$=S_p(\partial_i,\partial_j,\partial_k) \tag{4.9}$$

となるから，結局，

$$g_p(\nabla^{(0)}_{\partial_i}\partial_j,\partial_k)=\frac{1}{2}S_p(\partial_i,\partial_j,\partial_k)+\sum p(\partial_i\partial_j l)(\partial_k l) \tag{4.10}$$

となり，これと (4.3) とを比較することにより定理を得る．□

以下，この定理から導かれることを述べる．

この α 接続係数の表式より，S_{n-1} は (3.9) で与えられる Fisher 計量 g および $\alpha=\pm 1$ の接続に関して双対平坦[2] と呼ばれる構造を持つことが分かる [3]．双対平坦な多様体に関しては多くの数学的事実が知られている（例えば互いに直交するアファイン座標系の存在など）．この理解によりダイバージェンスと呼ばれる統計量についてある種の Pythagoras の定理が導ける．このように統計的な概念に幾何学的理解が付与されるのが情報幾何学の面白さである．

5. 量子状態空間の記述と今後の展望

文献 [4] にも詳述されているが，この分野の量子物理への応用に向けての研究が進められている．量子系の状態空間は Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の Hermite 作用素全体の集合を $\mathcal{L}_h(\mathcal{H})$ と書くとき[3]，

$$S=\{\rho\in\mathcal{L}_h(\mathcal{H});\ \rho\geqq 0,\ \mathrm{Tr}\rho=1\} \tag{5.1}$$

とあらわされる．そして量子系が状態 ρ にあるとき，測定 Π を行った結果[4] としてデータ x_i が得られる確率は

$$p(x_i)=\mathrm{Tr}\{\rho\Pi(x_i)\} \tag{5.2}$$

で与えられる．このように量子論における確率分布空間の記述の仕方が与えられるわけであるが，特に物理量の非可換性から，古典分布空間のそれとは数学的構造が異なる．そのため古典分布と同様の幾何学的描像をそのまま考えることはできない．実際に量子論に対する Chentsov の定理のような決定的な結論はいまだ得られていない [3]．

そのうえで，(5.2) からわかるように，対象としている量子空間は混合状態を含むものである．一方で，現在，有限温度の量子系（そこでは混合状態による系の記述が本質的である）の解明に向けての研究がさかんに行われている [9, 10]．量子系における熱力学の第 2 法則の理解に向けて，この

2) 双対な接続それぞれについて曲率 R も捩率 T もゼロ．ここで，接続に対応した共変微分を ∇ としたとき，$R(X,Y,Z)=\nabla_X(\nabla_Y Z)-\nabla_Y(\nabla_X Y)-\nabla_{[X,Y]}Z$, $T(X,Y)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y]$ である．ただし，$[X,Y]=XY-YX$.

3) ここでは有限系を仮定する．

4) 測定 Π とは，$\mathbb{R}$ の有限部分集合から $\mathcal{L}_h(\mathcal{H})$ への正作用素値測度 (POVM) である．量子測定やその数理に関しては，例えば [8] を参照のこと．

ような幾何学的アプローチが一定の役割を果たす可能性がある．この分野の全体的な進展が期待されるところである．

6. 終わりに

本稿では確率分布空間における幾何学的構造について述べ，特に α 接続係数の表式を求めることを通じて情報幾何学の面白さを伝えるべく解説を行った．なお，筆者（峰）は 2020 年度に高崎経済大学の客員研究員としての研究環境を得た．この場を借りて感謝申し上げる．

参考文献

［1］Amari, S.I., Differential geometry of curved exponential families-curvatures and information loss. *The Annals of Statistics*, **10** (2), 357-385 (1982)

［2］Amari, S.I., & Nagaoka, H., *Methods of information geometry*, American Mathematical Soc. (2007)

［3］藤原彰夫,「情報幾何学の基礎」，牧野書店 (2015).

［4］甘利俊一 他，情報幾何学の探求 –基礎と応用，現状と展望に迫る–,「数理科学」，**689**, pp. 5-73 (2020).

［5］長岡浩司，大阪市立大学数学研究所ミニスクール「情報幾何への入門と応用」講義資料 (2006).

［6］松本幸夫,「多様体の基礎」，東京大学出版会 (1988)

［7］N. N. Chentsov, *Statistical Decision Rules and Optimal Inference*, American Mathematical Society (1982)

［8］沙川貴大，上田正仁,「量子測定と量子制御」サイエンス社 (2016).

［9］Hiroomi Umezawa，場の量子論―ミクロ，マクロ，そして熱物理学の最前線，培風館 (1995).

［10］峰真如，小出知威，奥村雅彦，山中由也，H theorem and fluctuation theorem in quantum mechanics, 京都大学基礎物理学研究所研究会「熱場の量子論とその応用」(2007)